2019학년도 대학수학능력시험 대비

2018학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'가'형 정답

1	⑤	2	②	3	①	4	③	5	⑤
6	②	7	②	8	③	9	①	10	④
11	④	12	③	13	③	14	④	15	⑤
16	①	17	④	18	⑤	19	②	20	①
21	②	22	24	23	12	24	6	25	2
26	59	27	50	28	131	29	28	30	350

해 설

1. [출제의도] 벡터의 뺄셈을 계산한다.

$\vec{a}-\vec{b}=(4,\ 1)$ 이므로 모든 성분의 합은 $4+1=5$

2. [출제의도] 지수함수의 극한값을 계산한다.

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x(x+2)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{x+2}\right)=\frac{3}{2}$

3. [출제의도] 좌표공간에서 직선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 계산한다.

직선 $\dfrac{x+a}{2}=z+2,\ y=b$가 원점을 지나므로

$\dfrac{0+a}{2}=0+2,\ 0=b$ 따라서 $a+b=4$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이해한다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ 에서 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}+\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 접선의 기울기를 이해한다.

$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$ 이라 하면 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$f'(4)=\dfrac{3}{2}\times4^{\frac{1}{2}}=3$

6. [출제의도] 이항분포를 이해한다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=36\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=8$

7. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\ \sin\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

$=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{4}{5}\right)-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

8. [출제의도] 자연수의 분할을 이해한다.

$7=6+1$

$=4+3=4+1+1+1$

$=2+5=2+3+1+1=2+1+1+1+1+1$

따라서 구하는 분할의 수는 6이다.

9. [출제의도] 부분적분법을 이해한다.

$\displaystyle\int_1^e(1+\ln x)\,dx=\Big[x\Big]_1^e+\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx=e$

10. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 미지수의 범위를 이해한다.

쌍곡선 $x^2-y^2=1$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{64}=-1$의 점근선의 방정식은 각각 $y=\pm x,\ y=\pm4x$

$1\le|m|\le4$ 이므로 정수 m의 개수는 8이다.

11. [출제의도] 벡터의 내적과 벡터의 크기 사이의 관계를 이해한다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=4$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=2$

따라서 직각삼각형 ABM에서

$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|=2\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{3}$

[다른 풀이]

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ 에서

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0$

이고 $\overline{\mathrm{AB}}=1$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=4^2-4=12$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2\sqrt{3}$

12. [출제의도] 지수함수와 삼각함수가 포함된 부등식을 이해한다.

(ⅰ) $2^x-8<0$ 이고 $\cos x-\dfrac{1}{2}>0$ 인 경우

$0<x<3$ 이고 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$

(ⅱ) $2^x-8>0$ 이고 $\cos x-\dfrac{1}{2}<0$ 인 경우

$3<x<\pi$ 이고 $\dfrac{\pi}{3}<x<\pi$ 이므로 $3<x<\pi$

따라서 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $3<x<\pi$ 이므로

$(b-a)+(d-c)=\left(\dfrac{\pi}{3}-0\right)+(\pi-3)=\dfrac{4\pi}{3}-3$

13. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}=0$ 에서 $x=\dfrac{1}{2}$ 이고 $x=\dfrac{1}{2}$ 의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$ 에서 극소이면서 최소이다.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}dt$

$=\Big[\ln|t^2-t+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\ln\dfrac{3}{4}$

14. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

표본비율은 $\hat{p}=0.2$ 이고 표본의 크기가 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰구간은

$0.2-1.96\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{400}}\le p\le0.2+1.96\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{400}}$

따라서 $b-a=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{400}}=0.0784$

15. [출제의도] 조건부확률을 구하는 상황을 추측한다.

갑이 꺼낸 흰 공의 개수가 을이 꺼낸 흰 공의 개수보다 많은 사건을 A, 을이 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건을 B라 하자.

갑이 꺼낸 흰 공의 개수가 을이 꺼낸 흰 공의 개수보다 많으려면 갑이 꺼낸 흰 공이 2개이고 을이 꺼낸 흰 공이 1개이거나 갑이 꺼낸 흰 공이 2개이고 을이 꺼낸 흰 공이 없어야 한다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{3}$

16. [출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피 문제를 해결한다.

점 $(t,\ 0)\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\le t\le\dfrac{\sqrt{3\pi}}{2}\right)$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이는

$2f(t)\times2f(t)=4t\sin t^2$ 이다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는 $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}4t\sin t^2\,dt$

$t^2=u$로 놓으면 $\dfrac{du}{dt}=2t$ 이므로

$\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}4t\sin t^2\,dt=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin u\,du$

$=2\times\Big[-\cos u\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=2\sqrt{2}$

17. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 추측한다.

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}=\sin\theta$ 이므로 삼각형 BCD는 이등변삼각형이다.

$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\angle\mathrm{CBD}=\pi-2\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta,\ \angle\mathrm{BDE}=2\theta$

$\overline{\mathrm{DE}}=\sin\theta\cos2\theta,\ \overline{\mathrm{BE}}=\sin\theta\sin2\theta$

따라서 사다리꼴 BCDE의 넓이는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\{(\sin\theta\cos2\theta+\sin\theta)\times\sin\theta\sin2\theta\}$

$=\dfrac{1}{2}\sin^2\theta\sin2\theta(1+\cos2\theta)$

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times(1+\cos2\theta)\right\}$

$=1^2\times1\times2=2$

18. [출제의도] 좌표평면 위의 점의 운동 상태와 관련된 문제를 해결한다.

점 P의 속력이 매초 1이므로 t초 후 호 AP의 길이가 t이고 따라서 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 t이다. 따라서 직선 OP의 방정식은 $y=(\tan t)x$ 이고, 점 Q는 두 직선 $y=-x+1$과 $y=(\tan t)x$의 교점이므로 시각 t에서의 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{1+\tan t},\ \dfrac{\tan t}{1+\tan t}\right)$이다.

따라서 점 Q의 속도는

$\left(-\dfrac{\sec^2t}{(1+\tan t)^2},\ \dfrac{\sec^2t}{(1+\tan t)^2}\right)$이다.

점 P의 x좌표가 $\dfrac{4}{5}$일 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 그 좌표는 $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$이다.

따라서 점 P의 x좌표가 $\dfrac{4}{5}$일 때의 시각을 t_1이라 하면 $\tan t_1=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $\sec^2t_1=\dfrac{25}{16}$

이때 점 Q의 속도는

$\left(-\dfrac{\frac{25}{16}}{\left(\frac{7}{4}\right)^2},\ \dfrac{\frac{25}{16}}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}\right)=\left(-\dfrac{25}{49},\ \dfrac{25}{49}\right)$이므로

$b-a=\dfrac{25}{49}-\left(-\dfrac{25}{49}\right)=\dfrac{50}{49}$

19. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 증명한다.

$a=2^{x_1}\times3^{y_1},\ b=2^{x_2}\times3^{y_2},\ c=2^{x_3}\times3^{y_3},\ d=2^{x_4}\times3^{y_4}$

이라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4=n,\ y_1+y_2+y_3+y_4=n$

(단, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$에 대하여 $x_i,\ y_i$는 음이 아닌 정수)

이다. 이때 $a+b+c+d$가 짝수이므로 $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 짝수이거나 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 2개만 짝수이다.

(ⅰ) $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 짝수인 경우

x_1, x_2, x_3, x_4가 모두 자연수이고 y_1, y_2, y_3, y_4는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{\boxed{n-4}} \times {}_4\mathrm{H}_n$ …… ㉠

(ii) a, b, c, d 중에서 2개만 짝수인 경우
x_1, x_2, x_3, x_4 중에서 자연수가 2개이고 0이 2개이므로 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times \boxed{{}_2\mathrm{H}_{n-2}}$

이다. 이때 a, b, c, d 중 홀수인 두 수는 1이 될 수 없으므로 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{\boxed{n-2}}$

이다. 따라서 순서쌍
$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$의 개수는

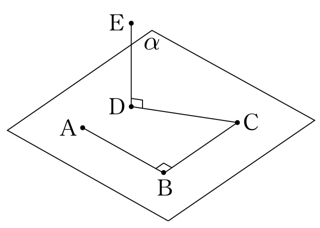
${}_4\mathrm{C}_2 \times \boxed{{}_2\mathrm{H}_{n-2}} \times {}_4\mathrm{H}_{\boxed{n-2}}$ …… ㉡

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 ㉠+㉡이다.
따라서 $f(n)=n-4$, $g(n)={}_2\mathrm{H}_{n-2}$, $h(n)=n-2$
$f(6)=6-4=2$, $g(7)={}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$, $h(8)=8-2=6$
이므로 $f(6)+g(7)+h(8)=2+6+6=14$이다.

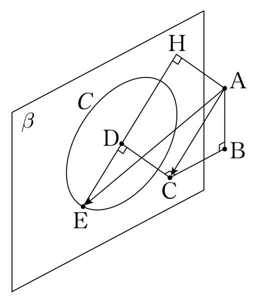
20. [출제의도] 공간에서 직선의 위치관계를 이해하고 벡터의 크기와 내적을 추측한다.

ㄱ. $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{2}$이므로 두 점 A, E는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 구 위의 점이다. 따라서 선분 AE가 구의 지름이 될 때 $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$는 최대이고 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 네 점 A, B, C, D가 평면 α 위에 있고 직선 DE가 평면 α와 수직이면 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{DE}}$이지만 두 선분 BC, CD가 수직이 아닐 때도 있다. (거짓)



ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이므로 직선 CD는 평면 ABC와 수직이다. $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{DE}}$이고 $\overline{\mathrm{DE}}=1$이므로 점 E는 직선 CD와 수직이고 점 D를 지나는 평면 β 위에서 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점이다.



점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HD}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$
$=0+|\overrightarrow{\mathrm{HD}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2+\overrightarrow{\mathrm{HD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$
$\le 2+\sqrt{2}\times1\times\cos 0=2+\sqrt{2}$
(단, 등호는 $\overrightarrow{\mathrm{HD}}=k\overrightarrow{\mathrm{DE}}\,(k>0)$일 때 성립한다.) (거짓)

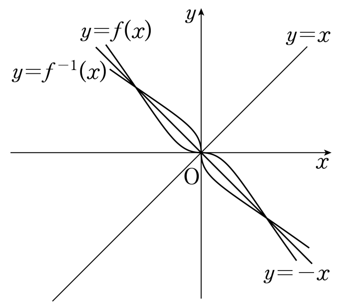
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

21. [출제의도] 역함수의 성질과 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f'(x)=-\frac{3kx^2(x^2+1)-kx^3(2x)}{(x^2+1)^2}=-\frac{k(x^2+3)x^2}{(x^2+1)^2}$$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. …… ㉠

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 임의의 한 교점을 (a, b)라 하면 점 (b, a)도 교점이다.
$f(-x)=-f(x)$에서 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(-a, -b)$를 지난다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 두 점 (b, a), $(-a, -b)$를 지난다.
$a\ne -b$이면 두 점 (b, a), $(-a, -b)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{a-(-b)}{b-(-a)}=1$이므로 ㉠에 모순이다.
따라서 $a=-b$이고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점은 모두 직선 $y=-x$ 위에 있다.



$f(x)=-x$에서 $-\dfrac{kx^3}{x^2+1}=-x$이고 방정식을 풀면

$x=-\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$

이므로 $\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$이다.
함수 $h(x)=f(x-2\beta)+2\alpha$라 하면
$h(\beta)=f(-\beta)+2\alpha=f(\alpha)+2\alpha=\beta+2\alpha=\alpha$
따라서 $g(\alpha)=\beta$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{h'(\beta)}$이고, $h'(x)=f'(x-2\beta)$이므로

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(-\beta)}$ …… ㉡

$f(-x)=-f(x)$의 양변을 미분하여 정리하면
$f'(-x)=f'(x)$이므로 $f'(-\beta)=f'(\beta)$

따라서 ㉡에서 $g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(\beta)}$이므로

$f'(\beta)=2g'(\alpha)=\dfrac{2}{f'(\beta)}$에서 $\{f'(\beta)\}^2=2$

㉠에서 $f'(\beta)=-\sqrt{2}$

$$f'(\beta)=-\frac{k\left(\frac{1}{k-1}+3\right)\left(\frac{1}{k-1}\right)}{\left(\frac{1}{k-1}+1\right)^2}=-\frac{3k-2}{k}=-\sqrt{2}$$

$k=\dfrac{2}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$

22. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$

23. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=4e^{3x-3}\times3=12e^{3x-3}$이므로 $f'(1)=12$

24. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해한다.

$\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(k, \log_2 k)$, $\mathrm{C}\left(k, \log_{\frac{1}{2}} k\right)$이므로 삼각형 ACB의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{2k+1}{3}, 0\right)$이고

$\dfrac{2k+1}{3}=3$에서 $k=4$

따라서 $\mathrm{B}(4, 2)$, $\mathrm{C}(4, -2)$이므로

삼각형 ACB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times4\times3=6$

25. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이해한다.

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{t^2+1}$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t^2}{t^2+1}$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{t^2+1}=2$

26. [출제의도] 정규분포의 표준화를 이해한다.

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{k-50}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-65}{2\sigma}\right)$에서

$\dfrac{k-50}{\sigma}=-\dfrac{k-65}{2\sigma}$이므로 $k=55$

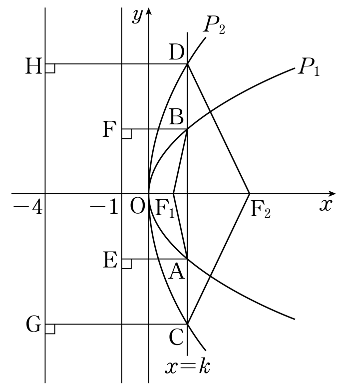
$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{55-50}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{5}{\sigma}\right)=0.1056$이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{5}{\sigma}\right)=0.5-0.1056=0.3944$

$\dfrac{5}{\sigma}=1.25$, $\sigma=4$이므로 $k+\sigma=55+4=59$

27. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 도형 문제를 해결한다.

포물선 P_1의 방정식은 $y^2=4x$이고
포물선 P_2의 방정식은 $y^2=16x$이다.
두 점 A, B에서 P_1의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 두 점 C, D에서 P_2의 준선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.



$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{AF_1}}=\overline{\mathrm{BF_1}}=k+1$이고 점 A와 점 B의 y좌표는 각각 $-2\sqrt{k}$, $2\sqrt{k}$이므로
$l_1=2(k+1)+4\sqrt{k}$
$\overline{\mathrm{CG}}=\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CF_2}}=\overline{\mathrm{DF_2}}=k+4$이고 점 C와 점 D의 y좌표는 각각 $-4\sqrt{k}$, $4\sqrt{k}$이므로
$l_2=2(k+4)+8\sqrt{k}$
따라서 $l_2-l_1=6+4\sqrt{k}=11$

$k=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$이므로 $32k=50$

28. [출제의도] 수학적 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

처음에 스티커가 붙어 있는 카드를 A, B, 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 C, D, E라 하자.

(i) 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 2장일 경우
첫 번째 시행에서 A, B를 모두 꺼내고, 두 번째 시행에서도 A, B를 모두 꺼내야 하므로 그 확률은

$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{100}$

(ii) 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장일 경우

1) 첫 번째 시행에서 A, B를 모두 꺼내는 경우
두 번째 시행에서는 A, B 중에서 1장, C, D, E 중에서 1장을 꺼내야 한다.
이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{100}$

2) 첫 번째 시행에서 A, B 중에서 1장, C, D, E 중에서 1장을 꺼내는 경우
첫 번째 시행에서 A, B 중에서 꺼낸 카드를 X, 꺼내지 않은 카드를 Y라 하면 두 번째 시행에서는 X를 반드시 꺼내고 나머지 1장을 Y, C, D, E 중에서 꺼내야 한다.
이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{24}{100}$

따라서 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장일 확률은

$\frac{6}{100}+\frac{24}{100}=\frac{30}{100}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{1}{100}+\frac{30}{100}=\frac{31}{100}$

$p=100$, $q=31$이므로 $p+q=131$

29. [출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

선분 BP의 중점 M을 지나고 직선 AH와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 E라 하자. 이때 점 M은 원 D의 중심이고, 직선 ME는 선분 BP의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{PE}}$이다. 이때 삼각형 APB에서

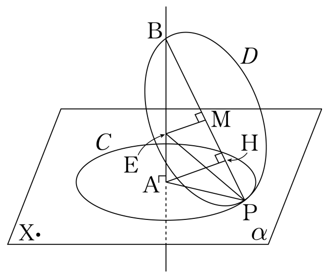
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{PAB}=90^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{3}$

삼각형 APB와 삼각형 MEB는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{ME}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{BM}}=1$, $\overline{\mathrm{BE}}=2\overline{\mathrm{ME}}=2$

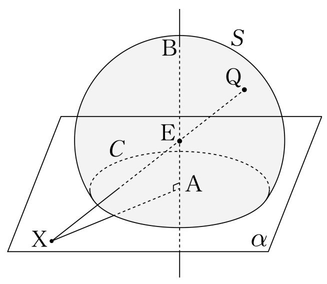
따라서 $\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{BE}}=2$



직선 ME는 원 D의 중심 M을 지나고 원 D를 포함하는 평면에 수직인 직선이므로 원 D 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{QE}}=\overline{\mathrm{BE}}=2$이다.

따라서 점 Q는 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구 위의 점이다.

이 구가 평면 α에 의해 잘려서 생기는 두 부분 중 점 B가 속한 부분(원 C 포함)을 S라 하면 점 P가 원 C 위를 움직일 때 원 D가 나타내는 도형이 S이다.



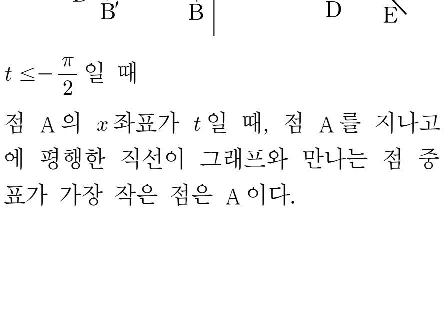
원 D 위의 점 Q는 도형 S 위의 점이므로 선분 XQ의 길이는 선분 XQ가 구의 중심 E를 지날 때 최대이고, 최댓값은

$\overline{\mathrm{XE}}+\overline{\mathrm{EQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{XA}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2}+2=\sqrt{5^2+1^2}+2=2+\sqrt{26}$

$m=2$, $n=26$이므로 $m+n=28$

30. [출제의도] 삼각함수의 성질과 정적분을 이용하여 문제를 해결한다.

부등식 $f(x)\le f(t)$를 만족시키는 x의 범위는 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=f(t)$와 만나거나 아래쪽에 그려지는 실수 x의 범위와 같다. 따라서 직선 $y=f(t)$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값이 $g(t)$이다.



(ⅰ) $t\le-\frac{\pi}{2}$일 때

점 A의 x좌표가 t일 때, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 A이다.

따라서 $g(t)=t$이다.

(ⅱ) $-\frac{\pi}{2}<t\le 0$일 때

점 B의 x좌표가 t일 때, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 B′이다.

따라서 점 B′의 x좌표가 $g(t)$이다.

두 점 B, B′은 직선 $x=-\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{t+g(t)}{2}=-\frac{\pi}{2}$에서 $g(t)=-t-\pi$이다.

(ⅲ) $0<t\le\pi$일 때

점 C의 x좌표가 t일 때, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 C′이다.

따라서 점 C′의 x좌표가 $g(t)$이다.

점 C는 곡선 $y=\sin x$ 위의 점이고 점 C′은 직선 $y=-x-\pi$ 위의 점이므로

$\sin t=-g(t)-\pi$에서 $g(t)=-\sin t-\pi$이다.

(ⅳ) $\pi<t\le\pi+1$일 때

점 D의 x좌표가 t일 때, 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 D′이다.

따라서 점 D′의 x좌표가 $g(t)$이다.

점 D는 직선 $y=-x+\pi$ 위의 점이고 점 D′은 곡선 $y=\sin x$ 위의 점이므로

$-t+\pi=\sin g(t)$이다.

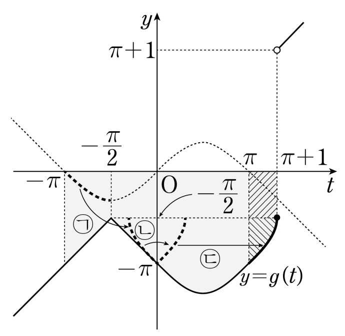
함수 $y=\sin x\left(-\pi\le x\le-\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $h(x)$라 하면 $g(t)=h(-t+\pi)$이다.

(ⅴ) $t>\pi+1$일 때

점 E의 x좌표가 t일 때, 점 E를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 E이다.

따라서 $g(t)=t$이다.

함수 $g(t)$는 $t=\pi+1$에서 불연속이므로 $\alpha=\pi+1$이고 그래프는 그림과 같다.



$\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,dt$

$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{t^2}{2}-\pi t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left[\cos t-\pi t\right]_{0}^{\pi}$

$=-\frac{7}{4}\pi^2-2$

한편 위의 그림에서

$y=\sin t\left(-\pi\le t\le-\frac{\pi}{2}\right)$

$\xrightarrow[\text{직선 } y=t \text{ 대칭}]{㉠} y=h(t)$

$\xrightarrow[y\text{축 대칭}]{㉡} y=h(-t)$

$\xrightarrow[\text{평행이동}]{㉢} y=h(-t+\pi)$

이므로

$\int_{\pi}^{\alpha}g(t)dt=-(\text{빗금 친 부분의 넓이})$

$=-\left(1\times\frac{\pi}{2}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\right)=-\frac{1}{2}\pi-1$

따라서 $\int_{-\pi}^{\alpha}g(t)\,dt=-\frac{7}{4}\pi^2-\frac{1}{2}\pi-3$

$p=-\frac{1}{2}$, $q=-3$이므로 $100\times|p+q|=350$