한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	논 술 예 시 답 안	오후(2)-1번

1. 포물선의 방정식을 정리하면 $(y-1)^2=4(x-3)$

$(y-1)^2=4(x-3)$을 x축 방향으로 -3만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동하여 얻는 새로운 포물선 $y^2=4x$를 고려하자.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 (x_0,y_0)에서의 접선의 방정식은 $x-\frac{y_0^2}{4}=x-x_0=\frac{y_0}{2}(y-y_0)$, 즉, $x=\frac{y_0}{2}(y-y_0)+\frac{y_0^2}{4}$ …… ①

이 접선이 (a,b)를 지난다면 $a=\frac{y_0}{2}(b-y_0)+\frac{y_0^2}{4}$이고 정리하면 y_0에 대한 이차 방정식 $y_0^2-2by_0+4a=0$을 얻는다. 이를 ②라 하자.

점 (a,b)에서 포물선 $y^2=4x$에 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, 접선과 포물선의 접점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$라 하면 y_1과 y_2는 ②의 해이고 근과 계수와의 관계에 의해 $y_1y_2=4a$ …… ③

한편, 두 접선이 수직으로 만나면 $y_1y_2\neq 0$이고, 점 P, Q에서의 접선의 기울기는 ①에 의해 각각 $\frac{2}{y_1}$, $\frac{2}{y_2}$이다.

따라서 $\frac{4}{y_1y_2}=-1$, 즉, $y_1y_2=-4$ …… ④

③과 ④을 연립하면 $a=-1$을 얻는다.

이제 원래의 포물선을 다루기 위해 $a=-1$를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동하면 $a=2$ (b는 임의의 실수)가 우리가 원하는 점 (a,b)의 집합이 됨을 알 수 있다.

2. 타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 (x_0,y_0)에서의 접선의 방정식은 $x_0x+\frac{y_0y}{9}=1$

$y_0\neq 0$이면 $y=-\frac{9x_0}{y_0}x+\frac{9}{y_0}$ (점 $(-2,s)$에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$에 그은 접선의 접점 (x_0,y_0)은 $y_0\neq 0$을 만족한다.)

$m=-\frac{9x_0}{y_0}$라 하자. $81x_0^2+9y_0^2=81$의 양변을 y_0^2으로 나누면 $m^2+9=\frac{81x_0^2}{y_0^2}+9=\frac{81}{y_0^2}$가 되므로 $\frac{9}{y_0}=\pm\sqrt{m^2+9}$

따라서 기울기가 m인 타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$의 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+9}$

이 식이 점 $(-2,s)$를 지나면 $s=-2m\pm\sqrt{m^2+9}$이고, 이를 정리하면 $3m^2+4sm+(s^2-9)=0$

점 $(-2,s)$를 지나는 접선의 방정식의 기울기를 m_1, m_2라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-\frac{4s}{3}$, $m_1m_2=\frac{s^2-9}{3}$이고, 이로부터 $|m_1-m_2|=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=\frac{2}{3}\sqrt{s^2+27}$을 얻는다.

기울기 m_1, m_2인 두 직선이 이루는 각을 θ라 하면 $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

따라서 $\tan\theta=\frac{2\sqrt{s^2+27}}{s^2-6}$ ($s>\sqrt{6}$)

3. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 (x_0,y_0)에서의 접선의 방정식은 $x_0x-\frac{y_0y}{9}=1$

이 접선이 점 $(t,6)$을 지나면 $tx_0-\frac{2y_0}{3}=1$ …… ⑤

이를 $x_0^2-\frac{y_0^2}{9}=1$과 연립하면 $(t^2-4)x_0^2-2tx_0+5=0$ …… ⑥

점 $(t,6)$에서 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2이기 위해서는 ⑥이 x_0에 대한 이차 방정식으로써 두 개의 실근을 가져야 한다. 이 때 y_0는 ⑤에 의해 유일하게 결정되며 x_0는 $x_0\leq -1$ 또는 $x_0\geq 1$을 만족한다.

경우 1) $t=\pm 2$일 때 ⑥은 x_0에 대한 일차 방정식이고 하나의 실근만을 갖는다.

경우 2) $t\neq\pm 2$이라 가정하자. ⑥의 판별식이 양수이면, 즉, $D/4=t^2-5(t^2-4)=4(5-t^2)>0$이면 두 개의 실근을 갖는다.

따라서 $-\sqrt{5}<t<-2$, $-2<t<2$, $2<t<\sqrt{5}$일 때 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2이다.